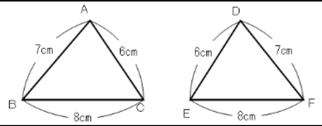
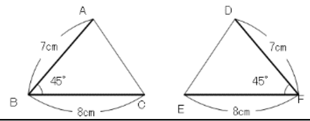
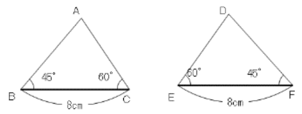
NPO 法人　TOPPA

三角形の合同

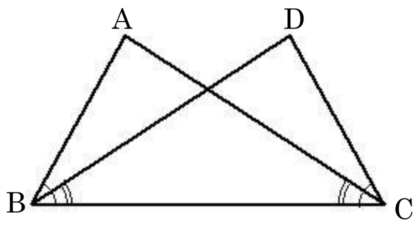
高校入試対策
三角形の合同

【重要】三角形の合同条件

	三組の辺がそれぞれ等しい
	二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい
	一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい

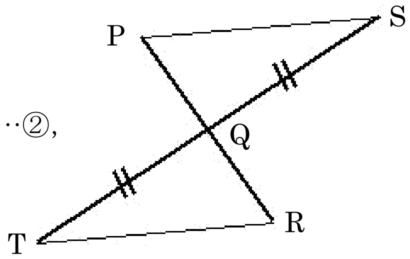
【例題】以下の問いに答えなさい。

(1)右図で，∠ABC＝∠DCB，∠ACB＝∠DBC ならば，
　△ABC≡△DCB となることを証明しなさい。



［証明］△ABC と△［　DCB　］で，
∠ABC＝∠［　DCB　］　…①
∠ACB＝∠［　DBC　］　…②　「仮定」
ここで［　BC　］は共通…③ ←もう一つ探す
①・②・③より，［　一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい　］ので，
△ABC≡△［　DCB　］といえる。

(2) 線分 PR と ST が点 Q で交わっている。
SQ＝TQ，∠S＝∠T ならば，△PQS≡△RQT となることを
証明せよ。

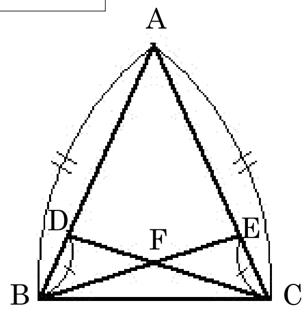


［証明］△PQS と△RQT で，SQ＝［　TQ　］…①，∠S＝［　∠T　］…②，
［ 対頂］角が等しいので，∠［ PQS ］＝∠［　RQT　］…③
①・②・③より，
［一組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい］ので，
△PQS≡△［ RQT］といえる。

二等辺三角形の定理の逆

【重要】［ 2 つの角］（底角）が等しい三角形は［二等辺三角形］

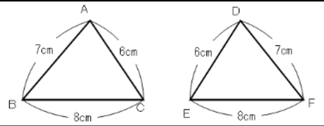
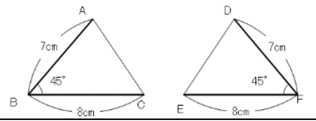
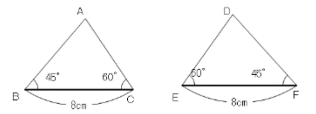
【例題】AB＝AC である二等辺三角形の AB 上に D，また AC 上に
E を，DB＝CE となるようにおき，CD と BE の交点を F とする。
このとき，△FBC は二等辺三角形となることを証明しなさい。



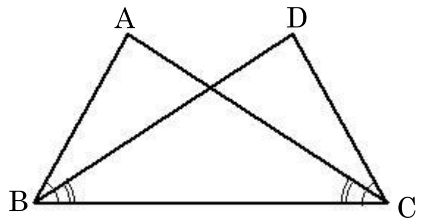
説明）△DBC と△ECB の合同を言い，∠FCB＝∠FBC であること
を示し，2 つの角が等しいことから，△BCF は二等辺三角形
ということを示す。

［証明］△DBC と△ECB で，
△ABC は AB＝AC である二等辺三角形なので，
∠DBC＝∠ECB …①，DB＝［　EC　］…②，［　EC　］は共通…③
①・②・③より，［二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい］ので，△DBC≡△［ECB］である。
対応する角が等しいので，∠FCB＝∠［　FBC　］となる。
△FBC は［ 二つの角が等しい］ので二等辺三角形といえる。

【重要】三角形の合同条件

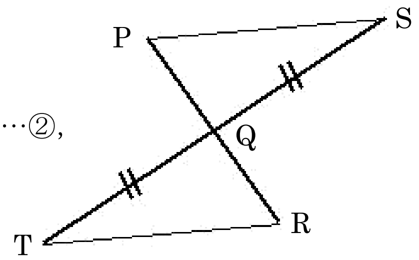
	[　　　　]がそれぞれ等しい
	[　　　　　　　　]がそれぞれ等しい
	[　　　　　　　　]がそれぞれ等しい

【例題】以下の問いに答えなさい。



(1)右図で，∠ABC＝∠DCB，∠ACB＝∠DBC ならば，
　△ABC≡△DCB となることを証明しなさい。

［証明］△ABC と△［　　　　］で，
　∠ABC＝∠［　　　　］…①
　∠ACB＝∠［　　　　］…②
　ここで［　　　］は共通…③
　①・②・③より，［　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，
　△ABC≡△［　　　　］といえる。

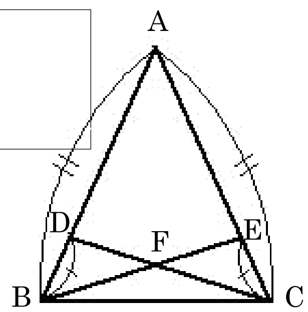


(2) 線分 PR と ST が点 Q で交わっている。
　SQ＝TQ，∠S＝∠T ならば，△PQS≡△RQT となることを
　証明せよ。

［証明］△PQS と△RQT で，SQ＝［　　　］…①，∠S＝［　　　］…②，
　［　　］角が等しいので，∠［　　］＝∠［　　　］…③
　①・②・③より，
　［　　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，
　△PQS≡△［　　］といえる。

二等辺三角形の定理の逆

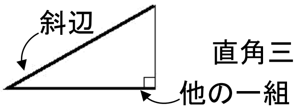
【重要】［　　　　　］(底角)が等しい三角形は［　　　　　　］



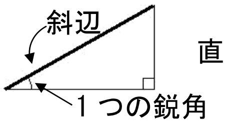
【例題】AB＝AC である二等辺三角形の AB 上に D，また AC 上に
　E を，DB＝CE となるようにおき，CD と BE の交点を F とする。
　このとき，△FBC は二等辺三角形となることを証明しなさい。

［証明］△DBC と△ECB で，
　△ABC は AB＝AC である二等辺三角形なので，
　∠DBC＝∠ECB …①，DB＝［　　　］…②，［　　　］は共通…③
　①･②･③より，［　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，△DBC≡△［　　］である。
　対応する角が等しいので，∠FCB＝∠［　　　　］となる。
　△FBC は［　　　　　　　　　］ので二等辺三角形といえる。

【重要】　直角三角形の合同条件

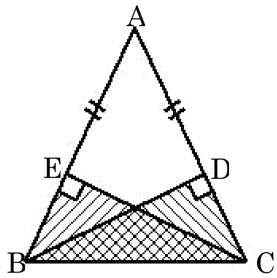
① 

直角三角形の[斜辺と他の一組の辺]がそれぞれ等しい

② 

直角三角形の［斜辺と 1 つの鋭角]がそれぞれ等しい

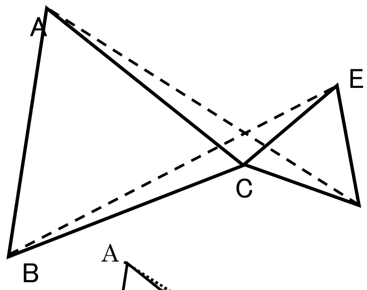
【例題】AB＝AC の二等辺三角形の頂点 B から辺 AC に，頂点 C が辺 AB に垂線をおろし，それぞれの垂線の足を D，E とする。このとき，BD＝CE となることを証明しなさい。

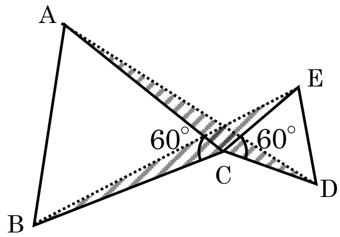


［証明］△EBC と［　△DCB　］で，
△ABC は二等辺三角形だから，
∠EBC＝［　∠DCB　］　　　　…①
∠BEC＝［　∠BDC　］＝90°　　…②
［　BC　］は共通　　　　　　　…③
①・②・③より，直角三角形の［　斜辺と一つの鋭角がそれぞれ等しい　］ので，
△EBC≡［　△DCB　］である。
よって，BD＝［　CE　］といえる。

角度をたす･ひく　証明

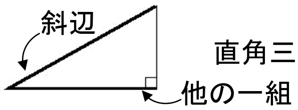
【例題】△ABC と△ECD は正三角形である。
右図の場合，A と D，B と E を結ぶと，AD＝BE となることを証明しなさい。
説明）△ACD と△BCE が合同であることを証明する。



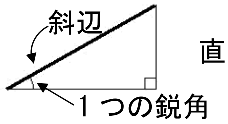


［証明］△ACD と△BCE で，
AC＝［　BC　］……①，CD＝［　CE　］……②
∠ACD＝∠ACE ＋［ 60 ］°　注）∠ECD のこと
∠BCE＝∠ACE ＋［ 60 ］°　注）∠BCA のこと
よって，∠ACD＝［　∠BCE　］……③
①・②・③より，［　二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい　］ので，△ACD≡△[BCE]である。よって，AD＝［　BE　］といえる。

【重要】　直角三角形の合同条件

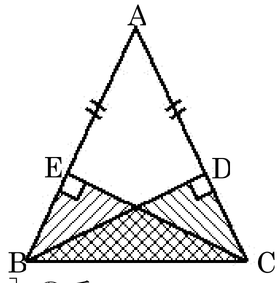
①　

直角三角形の[　　　　　　　　　　　]がそれぞれ等しい

②　

直角三角形の［　　　　　　　　　　　]がそれぞれ等しい

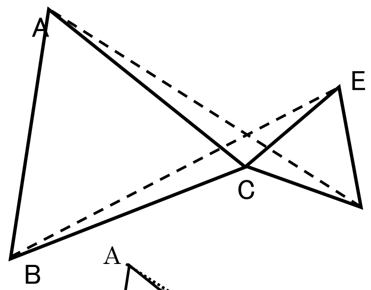
【例題】AB＝AC の二等辺三角形の頂点 B から辺 AC に，頂点 C が辺 AB に垂線をおろし，それぞれの垂線の足を D，E とする。このとき，BD＝CE となることを証明しなさい。



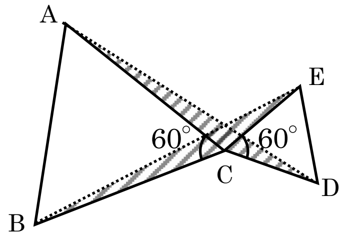
［証明］△EBC と［　　　　　　］で，
　△ABC は二等辺三角形だから，
　∠EBC＝［　　　　　　　］　　　　…①
　∠BEC＝［　　　　　　　］＝90°　　…②
　［　　　］は共通　　　　　　　　…③
　①・②・③より，直角三角形の［　　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，
　△EBC≡［　　　　　　　］である。
　よって，BD＝［　　　　］といえる。

角度をたす・ひく 証明

【例題】△ABC と△ECD は正三角形である。
右図の場合，A と D，B と E を結ぶと，AD＝BE となることを証明しなさい。



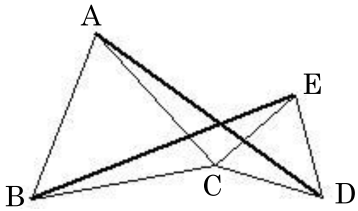
説明）△ACD と△BCE が合同であることを証明する。



［証明］△ACD と△BCE で，
　AC＝［　　　］……①，CD＝［　　　］……②
　∠ACD＝∠ACE ＋［　　］°
　∠BCE＝∠ACE ＋［　　］°
　よって，∠ACD＝［　　　　　］……③
　①・②・③より，[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，△ACD≡△［　　］で
　ある。よって，AD＝［　　　　］といえる。

〈練習〉次の問いに答えよ。

(1) △ABC と△ECD は正三角形である。図のようにC点が重なっているとき，BE＝AD であることを証明せよ。



［証明］△ACD と［　△BCE　］で，

AC＝［　BC　］…①，CE＝［　CD　］…②

∠ACD＝［　60　］°＋∠［　ACE　］

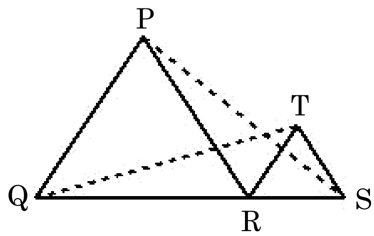
∠BCE＝［　60　］°＋∠［　ACE　］

よって，∠ACD＝［　∠BCE　］…③

①・②・③より，［　二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい　］ので，

△ACD≡［　△BCE　］である。よって，BE＝［　AD　］といえる。

(2) 線分 QS 上に点 R をとり，QR，RS をそれぞれ一組の辺として正三角形 PQR，正三角形 TRS を書く。このとき，PS＝QT になることを証明せよ。



［証明］△QRT と［　△PRS　］で

QR＝［　PR　］…①，TR＝［　RS　］…②

∠QRT＝［　60　］°＋［　∠PRT　］

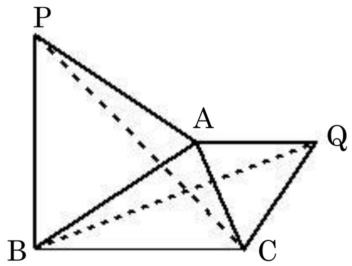
∠PRS＝［　60　］°＋［　∠PRT　］

よって，∠QRT＝［　∠PRS　］…③　　①・②・③より，

［　二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい　］ので，△QRT≡［　△PRS　］となる。

よって，PS＝［　QT　］といえる。

(3) △ABC の辺 AB を一組の辺する正三角形 PBA と，辺 AC を一組の辺とする正三角形 QAC を図のように書き入れると，PC＝BQ となる，このことを証明せよ。



［証明］△APC と△ABQ で，

AP＝［AB］…①，AC＝［AQ ］…②

∠PAC＝［60 ］°＋∠［ BAC］

∠BAQ＝［ 60］°＋∠［ BAC］

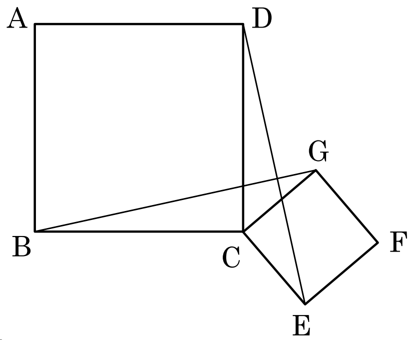
よって，∠PAC＝∠BAQ…③　　①・②・③より，

［ 二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい］ので，△APC≡△［ ABQ ］

PC＝［ BQ］といえる。

(4) 正方形 ABCD と正方形 CEFG が右図の位置にある。

このとき，BG＝DE となることを証明しなさい。



証明）△BCG と△［ DCE］で，

BC＝［ DC ］……①

GC＝［ CE ］……②

∠BCG＝［ 90 ］°＋∠［DCG ］

∠DCE＝［ 90 ］°＋∠［DCG ］

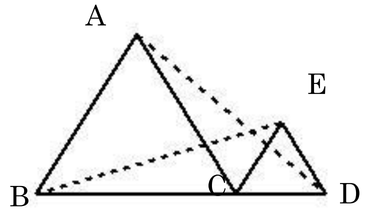
以上より，∠BCG＝∠［ DCE ］……③

①②③より，［二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい］ので，

△BCG≡△［DCE ］　　よって，BG＝［ DE ］といえる。

<練習>次の問いに答えよ。

(1) △ABC と△ECD は正三角形である。図のようにＣ点が重なっているとき，BE＝AD であることを証明せよ。



［証明］△ACD と［　　　　　］で，

AC＝［　　　　］…①，CE＝［　　　　］…②

∠ACD＝［　　　　］°＋∠［　　　　］

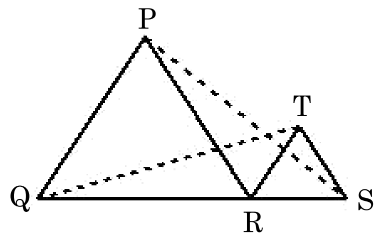
∠BCE＝［　　　　］°＋∠［　　　　］

よって，∠ACD＝［　　　　　］…③

①・②・③より，［　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，

△ACD≡［　　　　　］である。よって，BE＝［　　　　］といえる。

(2) 線分 QS 上に点Ｒをとり，QR，RS をそれぞれ一組の辺として正三角形 PQR，正三角形 TRS を書く。このとき，PS＝QT になることを証明せよ。



［証明］△QRT と［　　　　　］で

QR＝［　　　　］…①，TR＝［　　　　］…②

∠QRT＝［　　　　］°＋［　　　　　］

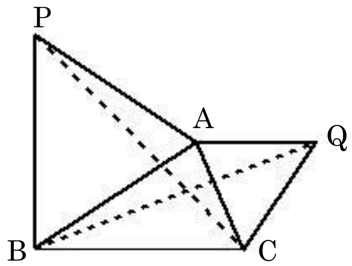
∠PRS＝［　　　　］°＋［　　　　　］

よって，∠QRT＝［　　　　　］…③　①・②・③より，

［　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，△QRT≡［　　　　　］となる。

よって，PS＝［　　　　］といえる。

(3) △ABC の辺 AB を一組の辺する正三角形 PBA と，辺 AC を一組の辺とする正三角形 QAC を図のように書き入れると，PC＝BQ となる，このことを証明せよ。



［証明］△APC と△ABQ で，

AP＝［　］…①，AC＝［　］…②

∠PAC＝［　］°＋∠［　　］

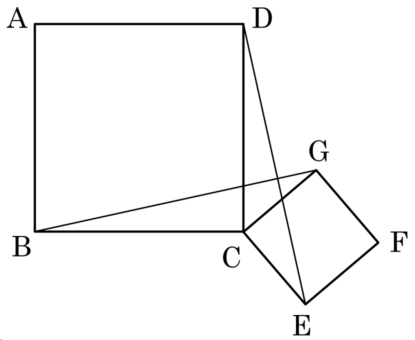
∠BAQ＝［　］°＋∠［　　］

よって，∠PAC＝∠BAQ…③　①・②・③より，

［　　　　　　　　　　　　　　　　　ので，△APC≡△［　　］

PC＝［　］といえる。

(4) 正方形 ABCD と正方形 CEFG が右図の位置にある。このとき，BG＝DE となることを証明しなさい。



証明）△BCG と△［　　］で，

BC＝［　　］……①

GC＝［　　］……②

∠BCG＝［　　］°＋∠［　　］

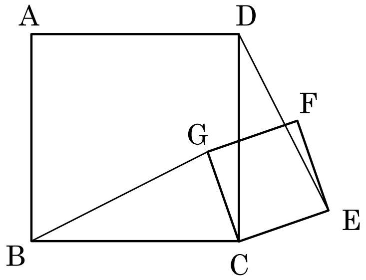
∠DCE＝［　　］°＋∠［　　］

以上より，∠BCG＝∠［　　］……③

①②③より，［　　　　　　　　　　　　　　　　　］ので，

△BCG≡△［　　］　よって，BG＝［　　］といえる。

(5) 正方形 ABCD と正方形 CEFG が左図の位置にあるとき，



BG＝DE となることを証明しなさい。

証明）△BCG と△[DCE]で，

BC＝[DC]……①

GC＝[EC]……②

∠BCG＝[90] ° －∠[DCG]

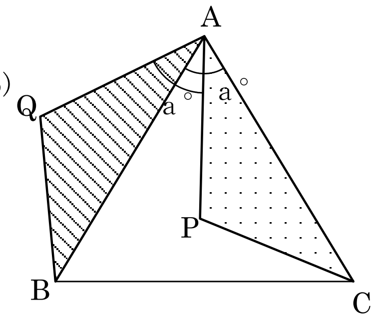
∠DCE＝[90]° －∠[DCG]

よって，∠BCG＝∠[DCE]……③

①②③より，[二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい]

ので，△BCG≡△[DCE]よって BG＝[DE]といえる。

(6)



左図 ABC は AB＝AC，∠BAC＝ａ°の二等辺三角形である。

いま，この三角形の内部に点 P をとり，点 P を頂点として，

3 点 ABC を通る平面で，図のように，a°回転した点を Q とする。

△AQB≡△APC を証明せよ。 <栃木県>

証明）△AQB と△APC で，

AB＝[AC]……①

AQ＝[AP]……②

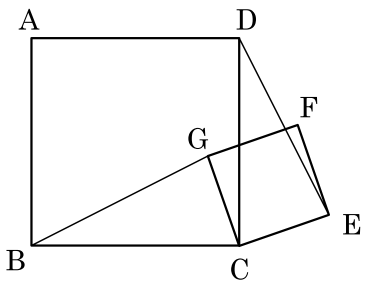
∠QAB＝ａ° －∠[BAP]　　∠PAC＝ａ° －∠[BAP]

以上より，∠QAB＝∠[PAC]……③

①②③より，[二組の辺とその間の角がそれぞれ等しい]

ので△AQB≡△[APC]といえる。

(5)正方形ABCDと正方形CEFGが左図の位置にあるとき，



BG＝DEとなることを証明しなさい。

証明）△BCGと△[　　]で，

BC＝[　　]……①

GC＝[　　]……②

∠BCG＝[　　]°－∠[　　]

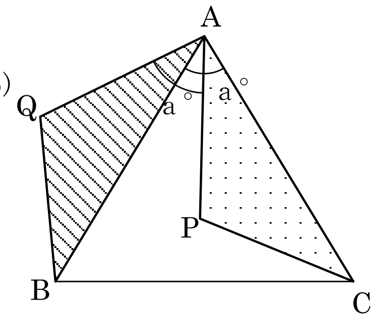
∠DCE＝[　　]°－∠[　　]

よって，∠BCG＝∠[　　　　]……③

①②③より，[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

ので，△BCG≡△[　　]よってBG＝[　　]といえる。

(6)



左図ABCはAB＝AC，∠BAC＝a°の二等辺三角形である。
いま，この三角形の内部に点Pをとり，点Pを頂点として，
3点ABCを通る平面で,図のように，a°回転した点をQとする。
△AQB≡△APCを証明せよ。　〈栃木県〉

証明）△AQBと△APCで，

AB＝[　　　]……①

AQ＝[　　　]……②

∠QAB＝a°－∠[　　]　　∠PAC＝a°－∠[　　]

以上より，∠QAB＝∠[　　]……③

①②③より，[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

ので△AQB≡△[　　]といえる。